التمرين الأول: (04.5 نقاط) نعتبر (U_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0=1$ و $u_1=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1}=2\alpha u_n+3\alpha^2 u_{n-1}$ حيث α عدد حقيقي من المجموعة $]-1;1[-\{0\}$

نضع ومن أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_{n+1}-3\alpha u_n$

1) أثبث أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول بدلالة α.

2) هل المتتالية (V_n) متقاربة ؟

3) أحسب بدلالة α و n المجموع : $S_n=v_0+v_1+......+v_n$

4) عين قيمة العدد الحقيقي α علما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{3}{4}$

-استنتج عندئذ U_n بدلالة n ثم بين أن (U_n) متقاربة.

5) في كل مايلي نضع $\alpha=-\frac{1}{3}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $\pi_n=v_0\times v_1\times ....v_n$

أ/ بين أن : $\pi_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$

ب/ عين أصغر عدد طبيعي n حتى يكون $\pi_n\le 3^{-44}$

التمرين الثاني(05 نقاط): المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(o;\vec{u};\vec{v}\right)$

1) أوجد العددين Z_1 و Z_2 الجذران التربيعيان للعدد المركب $L=2-2i\sqrt{3}$ ثم أكتبهما على الشكل الاسي.

2) نعتبر النقط A, B, C ذات اللواحق: $Z_A=2i$, $Z_B=\sqrt{3}+i$ و $Z_C=\sqrt{3}-i$

أ - بين ان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$ و عين قيسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{AC}\right)$.

ب- استنتج طبيعة الرباعي $OABC$

ج - عين لاحقة Ω مركز الرباعي $OABC$

3) أ- أكتب العبارة المركبة للتشابه S الذي يحول A إلى O و يحول C إلى B محددا عناصره المميزة.

ب- تحقق أن $S\circ S$ تشابه مباشر نسبته $\frac{1}{3}$ و أحد أقياس زاويته π.

جـ- نضع f التحويل النقطي المعرف بـ : $f=\underbrace{S\circ S\circ\cdots\cdots\circ S}_{n \text{ مرة}}$.

ن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون f تحاكيا نسبته سالبة.

4) k عدد حقيقي, (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z بحيث: $OM^2+AM^2+BM^2+CM^2=k$

أ - أثبت أن مجموعة النقط M من (E) تحقق العلاقة $\Omega M^2=\frac{k-8O\Omega^2}{4}$

ب -ناقش حسب قيم العدد الحقيقي k طبيعة المجموعة (E) .

التمرين الثالث (04.5 نقط): الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر النقط: $A(3;2;1)$, $B(3;5;4)$ و $C(0;5;1)$

1- بين أن المثلث ABC متقايس الاضلاع

2- تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1;1;-1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة له.

3- أ-عين احداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC

ب- عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يمر بالنقطة G و يعامد المستوي (ABC)

جـ - نعتبر النقطة $E(2+t;4+t;2-t)$ حيث t عدد حقيقي . عين العدد t حتى يكون $AE^2=AB^2$

د - عين طبيعة رباعي الوجوه $FABC$ حيث $F(4;6;0)$ ثم أحسب حجمه V

4 - بين أن المستقيمين (AF) و (BC) متعامدين.

5- أ- عين المجموعة (S) للنقط M من الفضاء التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MF}\right\|=6$

ب - عين الوضع النسبي للمجموعة (S) و المستوي (ABC)

التمرين الرابع (06 نقط):

تكن f الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(0)=1$ ومن أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f(x)=\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ (الوحدة $2cm$)

الجزء الأول

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا , **ب)** احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ) أدرس قابلية الاشتقاق لـ f عند 0 , **ب)** أثبت أن f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ثم أحسب $f'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$, استنتج اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها

3) أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$, تحقق أن : $4,6\prec\alpha\prec 4,7$

4) أكتب معادلة للمستقيم (D) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1

5) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=f(x)-2x-\frac{1}{2}$

أ- أحسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة g' ,استنتج اشارة $g'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة g ,استنتج وضعية (C_f) بالنسبة الى (D)

جـ أحسب $f(6)$ ثم أنشئ (C_f) و (D)

الجزء الثاني

1) n عدد طبيعي غير معدوم باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1}x^2\ln x\,dx$ بدلالة n

2)استنتج بدلالة n المساحة $A(n)$ بـ: cm^2 للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المماس (D) و المستقيمين ذا المعادلتين $x=\frac{1}{n}$ و $x=1$ ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} A(n)$

التمرين الأول:(04.5 نقاط)

1- من أجل كل عدد طبيعي n :

$v_{n+1}=2\alpha u_{n+1}+3\alpha^2u_n-3\alpha u_{n+1}$ +0.5

$=-\alpha(u_{n+1}-3\alpha u_n)=-\alpha v_n$ 0.25

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $-\alpha$ و حدها الأول $v_0=2-3\alpha$

2- من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=(2-3\alpha)(-\alpha)^n$ 0.25

و $\lim_{n\to+\infty} v_n=0$ لأن $(-1\prec\alpha\prec1$ و $\alpha\neq0)$ ومنه (V_n) متقاربة 0.25 0.25

3- $S_n=v_0+v_1+......+v_n=\frac{2-3\alpha}{1+\alpha}(1-(-\alpha)^{n+1})$ 0.25

4- $\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{3}{4}$ معناه $\frac{2-3\alpha}{1+\alpha}=\frac{3}{4}$ أي $\alpha=\frac{1}{3}$ 0.25

$S_n=v_0+v_1+......+v_n=(u_1-u_0)+(u_2-u_1)+\cdots(u_{n+1}-u_n)$

$=u_{n+1}-u_0=\frac{3}{4}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$ 0.25 0.25

معناه $u_{n+1}=\frac{7}{4}-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_n=\frac{7}{4}-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ اذن $\lim_{n\to+\infty} u_n=\frac{7}{4}$ أي (u_n) متقاربة +0.25 0.25

5/أ- $\alpha=-\frac{1}{3}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $\pi_n=v_0\times v_1\times.........v_n$ +0.25 0.25

$=3\times3\left(\frac{1}{3}\right)\times..........3\left(\frac{1}{3}\right)^n$ 0.25

$=3^{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-(n+1)}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$ 0.25

ب/ $\pi_n\le3^{-44}$ معناه $3^{-\frac{n^2-n-2}{2}}\le3^{-44}$ معناه $(n-10)(n+9)\ge0$ و n عدد طبيعي نجد $n\ge10$ ومنه أصغر عدد طبيعي هو $n=10$ 0.5

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1-نضع $z=x+iy$; z جذر تربيعي لـ L معناه $\begin{cases}x^2-y^2=2\\x^2+y^2=4\\xy=-\sqrt{3}\end{cases}$ 0.25

نجد : $Z_1=\sqrt{3}-i$ و $Z_2=-\sqrt{3}+i$

$z_1=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ $z_2=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ 0.25

2- $z_B-z_A=\sqrt{3}-i=z_C-z_O$ اذن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$ 0.25 0.5

$(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{AC})=\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_O}\right)=\arg\left(\frac{\sqrt{3}-3i}{\sqrt{3}+i}\right)=\arg(-\sqrt{3}i)$ 0.25

$=-\frac{\pi}{2}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$

ب - بما أن $OB\neq AC$ فان $OABC$ معين 0.25

جـ- $z_\Omega=\frac{z_B+z_O}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ 0.25

3) $\begin{cases}z_O=\alpha Z_A+\beta\\z_B=\alpha Z_C+\beta\end{cases}$ نجد $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}i$ و $\beta=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 0.5

ومنه S هو التشابه المباشر الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة Z الى النقطة M' ذات اللاحقة Z' بحيث $Z'=\frac{\sqrt{3}}{3}iZ+\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 0.25

نسبته $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و أحد أقياس زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومركزه النقطة Ω 0.75

ب- SoS تشابه مباشر نسبته $\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}$ و أحد أقياس زاويته 0.5

$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$

جـ- يكون f تحاكيا نسبته سالبة اذا كانت زاويته $\pi+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$

أي أن $n=2\alpha/\alpha\in\mathbb{N}^*$ 0.25

4-أ/ $OM^2+AM^2+BM^2+CM^2=k$ تكافئ

$4\Omega M^2+2O\Omega^2+2(3O\Omega^2)=k$ ومنه $\Omega M^2=\frac{k-8O\Omega^2}{4}$ 0.5

ب-لدينا $O\Omega^2=1$ ومنه اذا كان $k\prec8$ فان $(E)=\varnothing$

اذا كان $k=8$ فان $(E)=\{\Omega\}$ 0.75.

اذا كان $k\succ8$: (E) هي الدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها $\frac{\sqrt{k-8}}{2}$

التمرين الثالث: (04.5نقاط)

1- لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix}$ أي : 0.75

$AB=AC=BC=3\sqrt{2}$ ومنه المثلث ABC متقايس الاضلاع

2- $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$ ومنه $\vec{n}$ شعاع ناظمي لـ (ABC) 0.25 0.25

$x+y-z-4=0$ معادلة للمستوي (ABC) 0.25

3-أ/. $G(\frac{3+3+0}{3},\frac{2+5+5}{3},\frac{1+4+1}{3})$ اذن $G(2,4,2)$-

ب- تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) : $\begin{cases}x=t+2\\y=t+4\ ;t\in R\\z=-t+2\end{cases}$. 0.5

4/.معادلة للمستقيم (D) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 هي :

جـ- $AE^2=AB^2$ معناه $(2+t-3)^2+(4+t-2)^2+(2-t-1)^2=12$ 0.25

ومنه نجد $t=2$ أو $t=-2$

د-من أجل $t=2$ نجد E منطبقة على F أي $AF=AB=AC=BC$ و 0.25

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}\neq 0$ اذن $FABC$ رباعي وجوه منتظم.

مساحة المثلث ABC : $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AA'=\frac{9\sqrt{6}}{4}u\cdot a$ 0.5

حيث A' منتصف القطعة $[BC]$ ومنه $V_{FABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot FG$

لأن G هي المسقط العمودي لـ F على المستوي (ABC) اذن

$$V_{FABC}=\frac{9\sqrt{2}}{2}u\cdot v$$ 0.25

-4 $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ ومنه

$(AF)\perp(BC)$ 0.25

-5 أ- $\left\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MF}\right\|=6$ معناه $MI=3$ حيث I منتصف القطعة

$[GF]$ ومنه (S) هي سطح الكرة التي مركزها $I(3;5;1)$ 0.25

ونصف قطرها 3 0.25

ب-بما أن $d(I,(ABC))=\frac{|3+5-1-4|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ و $\sqrt{3}\prec 3$

فان (S) و المستوي (ABC) يتقاطعان وفق دائرة. 0.25

التمرين الرابع(06 نقاط) : 0.25

1-أ/ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$ ومنه f مستمرة عند 0 و (C_f) يقبل نقطة توقف 0.25 0.25

ب- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

2-أ/ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$ اذن f قابلة للاشتقاق عند 0 0.25

وبماأن f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ (كونها جداء و مجموع دوال قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$) فان f تقبل الاشتقاق على $[0;+\infty[$ 0.25

من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=2x(1-\ln x)$ و $f'(0)=0$ 0.5

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{e^2}{2}+1$	$\searrow$	$-\infty$

0.5

تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $[0;+\infty[$ ثم على المجال $[4,6;4,7]$ و $(f(4,6)=0,44;f(4,7)=-0,05)$

2- 0.25

$$A(n)=4\left[\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(x)-(2x+\frac{1}{2})dx\right]=4\left[\frac{1}{2n^3}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n}-I_n\right]cm^2$$

$$\lim_{n\to+\infty}A(n)=\frac{1}{9}$$

$$(D): y=2x+\frac{1}{2}$$ 0.25

5/ g معرفة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا: 0.25

$g'(x)=f'(x)-2$

g' معرفة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا: 0.25

$g''(x)=f''(x)=-\ln x$ ومنه g' تقبل قيمة حدية عظمى

هي 0 عند $x=1$ اذن من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'(x)\le 0$ 0.25

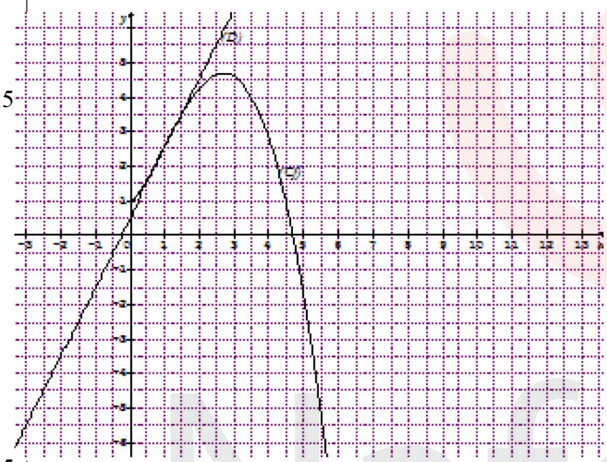
x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$ 0	

0.25

المنحنى يقع فوق المستقيم (D) في المجال $]0;1[$ وتحته في المجال $]1;+\infty[$ ويتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة 1 اذن (C_f) يقبل نقطة انعطاف هي $I(1;\frac{5}{2})$. $f(6)\approx -9.5$ 0.25 0.25

<u>رسم المنحنى</u>

0.5



0.5

-1/ نضع : $U(x)=\ln x$ ومنه $U'(x)=\frac{1}{x}$

$V'(x)=x^2$ ومنه $V(x)=\frac{x^3}{3}$

$$I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1}x^2\ln(x)dx=\left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_{\frac{1}{n}}^{1}-\frac{1}{3}\int_{\frac{1}{n}}^{1}x^2dx$$ 0.5

$$I_n=\frac{1}{3n^3}\ln(n)-\frac{1}{9}+\frac{1}{9n^3}$$